LOGIK UND MENGENLEHRE

ÜBUNGSBLATT 2

1. Seien $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 0 \\ x+1, & x < 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ 2x+1, & x < 0 \end{cases}$$

Man überprüfe, ob diese Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

2. Man untersuche die injektivität und die surjektivität der folgenden Abbildungen:

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = \begin{cases} n+1, & n \text{ gerade ist} \\ n-1, & n \text{ ungerade ist} \end{cases}$.

b) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x+1}{2x-2}$.

3. Man betrachte die Abbildungen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei $f(x) = x^2 + 3x + 2$ und $g(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$.

a) Man überprüfe, ob f injektiv oder surjektiv ist.

b) Man berechne $f \circ g$ und $g \circ f$.

4. Sei A eine endliche Menge. Fúr jede Abbildung $f : A \to A$, zeige man, dass die folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist injektiv.

(ii) f ist surjektiv.

(iii) f ist bijektiv.

5. Ist $f : A \to B$ eine Abbildung, so bezeichnen wir $\operatorname{Im} f = f(A)$, *das Bild von* f. Man finde $\operatorname{Im} f$ wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x+3}$.

6. Man betrachte eine Abbildung $f : A \to B$, und Teilmengen $X, X_1, X_2 \subseteq A$, $Y, Y_1, Y_2 \subseteq B$.MAn zeige:

a) $X \subseteq f^{-1}(f(X))$.

b) $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$.

c) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.

d) $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$.

e) $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.

f) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$. Ferner ist f genau dann injektiv wenn $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$ gilt für jedewelche Teilmengen $X_1, X_2 \subseteq A$.

7. Für eine Abbildung $f : A \to B$, definieren wir:

$$f_* : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B),\ f_*(X) = f(X),\ \text{für alle } X \subseteq A$$

$$f^* : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)\ f^*(Y) = f^{-1}(Y),\ \text{für alle } Y \subseteq B.$$

(Hier $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge der Menge A ist.) Dann:

a) Sind $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen, so gelten $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ und $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
b) $(\mathbf{1}_A)_* = \mathbf{1}_{\mathcal{P}(A)} = (\mathbf{1}_A)^*$

8. Mit der Notation von Übung 7, die folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist injektiv.
(ii) f_* ist injektiv.
(iii) $f^* \circ f_* = \mathbf{1}_{\mathcal{P}(A)}$.
(iv) f^* ist surjektiv.

9. Mit der Notation von Übung 7, die folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist surjektiv.
(ii) f_* ist surjektiv.
(iii) $f_* \circ f^* = \mathbf{1}_{\mathcal{P}(A)}$.
(iv) f^* ist injektiv.

10. Man überprüfe ob, die folgende Abbildung wohl definiert sind:

a) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z},\ f(x) = x - 1$.
b) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z},\ f\left(\frac{m}{n}\right) = m + n$.
c) $f : \mathbb{Q} \setminus \frac{1}{2} \to \mathbb{Q},\ f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{2n}{2m-n}$.

(Erinnerung $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$).

"Babeş-Bolyai" Universität, Fakultät für Mathematik und Informatik, RO-400084, Cluj-Napoca, Rumänien

E-mail address, George Ciprian Modoi: `cmodoi@math.ubbcluj.ro`